

NÚMEROS

Revista de Didáctica de las Matemáticas

<http://www.sinewton.org/numeros>

ISSN: 1887-1984

Volumen 84, noviembre de 2013, páginas 5-23

Desarrollo del cálculo mental a partir de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo

Emilio Valencia Cifuentes (Departamento de Educación Municipal de Laja. Chile)

*Fecha de recepción: 20 de febrero de 2013**Fecha de aceptación: 2 de junio de 2013*

Resumen

El propósito de este estudio es poder determinar si un programa para el desarrollo del cálculo mental, basada en el entrenamiento en combinaciones numéricas y la enseñanza de estrategias de cálculo, influye en las habilidades de cálculo mental de los estudiantes de primer a cuarto año de enseñanza básica. La investigación fue realizada mediante un diseño pre-experimental, con evaluación pre-test y post-test, con un solo grupo de cada nivel educativo. Los participantes fueron evaluados con el subtest de cálculo mental de la prueba EVAMAT, versión chilena, de García et al. (2009). Los principales resultados observados fueron mejoras significativas en el cálculo mental de los estudiantes de primero a cuarto año de enseñanza básica, independiente del sexo y el curso.

Palabras clave

Cálculo mental, combinaciones numéricas, estrategias de cálculo

Abstract

The purpose of this study is to determinate if a program to develop mental computation, based in number combination training and the teaching of computation strategies, do influence on the mental computing skills of the children from first to fourth grade of primary education. The investigation was made through a pre-experimental design, with pre-test and post-test evaluation, in one group of every one of the educational level. Participants were evaluated with the subtest of mental computing from the EVAMAT test, Chilean version, of García et al. (2009). The results of the study were significant improves on mental computing, in first to fourth grade children's, in both sex and in every educational level.

Keywords

Mental computing, number combinations, computing strategies

1. Introducción

Las políticas actuales existentes de educación en Chile han direccionado los esfuerzos ministeriales hacia la aplicación de leyes que aseguren resultados cuantitativos adecuados en las habilidades académicas de los estudiantes del país. Esto último a propósito de los bajos rendimientos evidenciados por los estudiantes chilenos en evaluaciones nacionales e internacionales. Es por ello que una de estas leyes, la ley de Subvención Escolar Preferencial (SEP) del Ministerio de Educación (MINEDUC, 2008) se ha instaurado en el sistema educativo público y particular subvencionado, entregando recursos para mejorar los aprendizajes claves de los niños, pero además exigiendo resultados cuantitativos año a año.



**Sociedad Canaria Isaac Newton
de Profesores de Matemáticas**

En lo que a resultados se refiere, desde el año 2000 hasta la fecha, y cada 3 años, se realiza a nivel internacional una evaluación de competencias de los estudiantes de 15 años en 3 áreas: Lectura, Matemáticas y Ciencias Naturales. Esta evaluación, conocida como prueba PISA (de su sigla en inglés Programme for International Student Assessment), es realizada por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OECD, 2010) y Chile ha participado voluntariamente de cada una de las aplicaciones, excepto la realizada el año 2003.

En estas evaluaciones, Chile no ha tenido grandes variaciones en cuanto al desempeño general de los estudiantes. En relación a lo anterior cabe destacar, para efectos de este estudio, los resultados en el área de las Matemáticas, dado que el año 2009 el promedio internacional fue de 496 puntos y Chile obtuvo un promedio de 421 puntos (cualitativamente en el nivel 3 de los 6 conceptualizados por la OECD), situando al país en el lugar 49 de 65 países participantes (OECD, 2010).

Bravo (2011) acepta e incluso recalca que los resultados en matemáticas se han mantenido en el mismo rango desde el año 1999 en Chile, siendo en ese año el promedio nacional de 250 puntos, y actualmente de 256 puntos en 4º año de enseñanza básica, diferencia que él no considera significativa.

La tendencia mencionada muestra que, en el área de las matemáticas, hay algo que hacer por la educación de los niños chilenos. Afortunadamente las políticas ministeriales han direccionado recursos que, en alguna medida, pretenden fortalecer la educación del país.

Dentro de las leyes que buscan una mejora en la educación chilena está la ley SEP, que pretende mejorar exponencialmente la calidad de la educación del país, poniendo metas cuantitativas que los establecimientos deben cumplir. La ley SEP, dentro de sus normativas, exige la evaluación de los aprendizajes claves del lenguaje y las matemáticas, todos los años, con el fin de monitorear que los establecimientos educacionales alcancen las metas propuestas cada 4 años de trabajo (MINEDUC, 2008).

Uno de los aprendizajes claves evaluados es el cálculo mental, habilidad matemática que para Deaño (2000) es fundamental en la ejecución de ejercicios aritméticos. Pese a ello, Espinoza, Barbé y Gálvez (2009) indican que, aunque el cálculo mental actualmente esté incluido en los planes y programas propuestos por el MINEDUC, aparentemente no está siendo aplicado de manera adecuada en el aula. Ellos realizaron una serie de entrevistas y encuestas tanto a estudiantes como profesores, así como la observación de experiencias en aula. En sus trabajos concluyeron que la enseñanza habitual de las clases de matemáticas no incluía al cálculo mental como una práctica generalizada en Chile, sino que tiende a bloquear en los niños y niñas la búsqueda de estrategias alternativas para abordar problemas, incluyendo las más elementales.

Es así como se logra vislumbrar la problemática a estudiar, la cual guarda relación con analizar estrategias o métodos efectivos en cuanto a la mejora de aprendizajes claves, más específicamente en este caso, el cálculo mental.

1.1. Objetivos del estudio

El objetivo general de este estudio es determinar si el programa REOPERA (de su sigla Reeducción de las Operaciones Aritméticas), basado en el entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo, influye en el desarrollo del cálculo mental de estudiantes de primer a cuarto año de enseñanza básica.

Como objetivos específicos se han planteado los siguientes:

- 1- Verificar si el programa de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo influye en el desarrollo del cálculo mental, en función de los distintos niveles escolares.
- 2- Verificar si el programa de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo influye en el desarrollo del cálculo mental, en función del sexo de los sujetos en estudio.

2. Marco Teórico

2.1. Un acercamiento al concepto de cálculo mental y su adquisición en los niños

Para Gómez (2005), el cálculo mental no debe confundirse con el cálculo estimado y éste no debe confundirse con el cálculo aproximado, ya que sólo en el cálculo mental se trabaja con datos exactos para generar respuestas mentales a un ejercicio aritmético. Así el cálculo mental sería entonces la forma de calcular sin utilizar una ayuda externa, siendo solo la mente la que trabaja y teniendo como base el cálculo reflexivo o pensado. Todo esto implica una reflexión que tolera toma de decisiones y elección de la estrategia más adecuada. Para este tipo de cálculo se requieren manipulaciones y habilidades, como: conteos, recolocaciones, dominio de tablas (o combinaciones numéricas), compensaciones, descomposiciones, etcétera., que sirven para poder alterar los datos iniciales y de esta forma trabajar más cómodamente con otros más fáciles de calcular.

Sumado a lo anteriormente mencionado, la mayoría de los investigadores (Baroody, 1985, 1994; Campbell y Graham, 1985; Crowley Shrager y Siegler, 1997; Deaño, 2000; Kilpatrick et al., 2001; Fuchs et al., 2006; Fuchs, Powell, Seethaler, Fuchs y Hamlet, 2010; National Mathematics Advisory Panel, 2008) coinciden en que existen 3 fases en las que un niño normal desarrolla el cálculo mental con números del 0 al 9; en la primera fase “contar todo” los niños cuentan todos los elementos, en la segunda fase “contar desde el primero” los niños parten contando desde el primero número, y agregan la cantidad correspondiente al segundo número, y en la tercera fase “contar desde el mayor” los niños eligen el número con mayor cantidad de elementos y luego suman desde ese número.

Además, para Deaño (2000) existen 2 grandes consideraciones con respecto a estas 3 fases. La primera es que estas 3 fases predicen una duración diferente en la realización de la tarea y los niños progresivamente descubren que la última fase es la más óptima y por lo tanto la mejor estrategia. La segunda consideración es que para poder acceder a estas fases, el primer requisito fundamental es que el alumno posea un conocimiento y manejo de los números bien consolidado.

Finalmente, se cree que el cálculo mental es fundamental en la ejecución de ejercicios aritméticos, y esta idea es respaldada por la mayoría de los investigadores expertos en el tema (Baroody, 1985, 1994; Campbell y Graham, 1985; Crowley et al., 1997; Deaño, 2000; Kilpatrick et al., 2001; Fuchs et al., 2006; Fuchs et al., 2010; National Mathematics Advisory Panel, 2008; Gálvez et al., 2010)

2.2. Beneficios del desarrollo del cálculo mental en los niños

Si bien es cierto, y tras leer lo revisado previamente, se pudiera entender que la gran ventaja de desarrollar el cálculo mental en los niños es que mejoren en la ejecución de ejercicios aritméticos, aparentemente no es el único beneficio de generar dicha capacidad en los niños.



En sus estudios de tesis doctoral, Gomez (1994) defiende la idea de que el desarrollo de cálculo mental en el aula es una práctica con beneficios más allá de esta capacidad en sí, dado que él destaca posibles influencias positivas en otras áreas tales como: contribuir a la comprensión y sentido del número, conocer las concepciones que tienen los estudiantes sobre los procedimientos de cálculo y proporcionar la base para el cálculo aproximado. Sumado a lo anterior Gómez afirma que se desarrollan capacidades intelectuales ya que proporcionan versatilidad e independencia de procedimientos; ayudan en la reflexión para decidir y elegir; favorecen la concentración; proporcionan confianza en el cálculo aritmético y despiertan el interés y la capacidad de concentración.

Así mismo Lethielleux (2005) afirma la idea de que el entrenamiento en cálculo mental es un muy buen medio para desarrollar la atención, concentración y memoria; familiarizar a los niños con los números de tal forma que puedan jugar con ellos, expresándolos de muchas formas diferentes; y favorecer la expresión, puesta en común, discusión y comparación (en dinámicas colectivas) de variados procedimientos y estrategias para calcular.

2.3. Las estrategias de cálculo mental

Para Gómez (1995) las estrategias de cálculo mental se entienden como principios directores generales de la resolución de un ejercicio aritmético, y que por ello, debiera funcionar con cualquier operación, pues de la estrategia en sí depende la forma en que se manejen los datos, mientras que los métodos son las formas en que se concretan las estrategias al tomar en cuenta las operaciones, los hechos y las relaciones numéricas involucradas en los datos, y los procedimientos son las secuencias ordenadas y explícitas de cálculos que desarrollan los métodos hasta llegar al resultado.

Por lo tanto, para Leger et al. (2011) las estrategias de cálculo mental son más que simples procedimientos y se puede decir que se encuentran más allá del papel, pues están en el plano de lo cognitivo y por lo tanto son más adaptativas; dependen de cómo vea el sujeto la situación específica involucrada en el ejercicio de cálculo mental. De esta manera se contraponen a los algoritmos convencionales, o universales, que son más burocráticos al intentar tratar a todos los números por igual y aplicarse sin considerar la situación problemática específica.

Así por ejemplo, para restar $27 - 14$, en vez de recurrir al algoritmo vertical convencional se podría utilizar una estrategia de cálculo mental elemental, en la que se avanzara sobre una recta numérica mental desde el 14 hasta el 27, y nos daríamos cuenta que hemos avanzado 13 espacios en la recta. Vemos así como en reemplazo del algoritmo convencional, se recurre a una estrategia mental o “visualización numérica”, ligada a la idea de que restar es “retroceder” o “recorrer lo que falta” (Lakoff y Nuñez, 2000; Soto-Andrade, 2006).

Esta representación mental de la recta numérica aparentemente posee un sustrato neurocognitivo a la base, tal como lo indican los trabajos de Knops, Thirion, Hubbar, Michel y Deaene (2009). Ellos enfatizan el rol de las metáforas sensoriomotrices en el aprendizaje de las matemáticas y la práctica del cálculo mental, en especial ante el uso de una recta numérica (los números son ubicaciones en la recta), indicando que los circuitos corticales para la atención espacial contribuyen a la aritmética mental cuando se utiliza la recta numérica en ejercicios aritméticos concretos. Esto lo descubrieron comparando las Imágenes por Resonancia Magnética (IRM) que resultaban en el ejercicio mental de una resta y luego en el ejercicio concreto de la misma, con una recta numérica, notando que en ambos ejercicios se activaba el mismo circuito cerebral.

2.4. El concepto de combinación numérica

Las combinaciones numéricas son consideradas un elemento esencial en la facilitación del cálculo mental, e incluso la resolución de problemas, por varios autores (Golman, Pellegrino y Mertz, 1988; Deaño, 2000; Kilpatric, Swafford y Findell, 2001; Fuchs et al., 2006, 2010).

Al hablar de combinaciones numéricas nos referimos a los ejercicios que pueden realizarse generando adiciones o sustracciones y multiplicaciones de un solo dígito con los números del 0 al 9. También pueden ser conceptualizados como hechos numéricos (Deaño, 2000).

Éstas combinaciones numéricas, y su subsecuente resolución, son componentes muy importantes en toda matemática elemental. Es normal encontrar las combinaciones numéricas incorporadas dentro del curriculum desde kínder a segundo grado de primaria en las escuelas de Estados Unidos y, típicamente, los estudiantes desarrollan las habilidades para resolver automáticamente las combinaciones numéricas a inicios del tercer grado de primaria (Fuchs, et al., 2010).

Coincidentemente con lo anterior, la memorización de combinaciones numéricas, que incluyan adiciones de un solo número (e.g., $9 + 3 = 12$) y sus respectivas sustracciones (e.g., $12 - 9 = 3$), han sido un objetivo central en la enseñanza elemental de las matemáticas desde tiempos Babilónicos (Baroody, Bajwa y Eiland, 2009), sin embargo, en la actualidad existe un acuerdo generalizado entre los investigadores al decir que todos los niños deben lograr este objetivo en orden de poder facilitar el cálculo mental y escrito con números racionales, e incluso la resolución de problemas (Golman et al., 1988; Deaño, 2000; Kilpatric, Swafford y Findell, 2001; Fuchs et al., 2006).

Así, los niños que no logran dominar las combinaciones numéricas aditivas, y particularmente aquellos que no logran dominar incluso las más simples combinaciones aditivas, al final del primer año de estudios primarios, en Estados Unidos (el equivalente a primer año básico en Chile), se encuentran significativamente en desventaja con respecto a sus pares en cuanto al aprendizaje y dominio de la sustracción, multiplicación y división, resolver operaciones a nivel mental y escrito eficientemente, y operar con números racionales en general, dentro de los años posteriores de enseñanza (National Mathematics Advisory Panel, 2008).

2.5. Algunos estudios sobre entrenamiento en cálculo mental

Jordan, Kaplan, Ramineni y Locuniak (2008) han estudiado un aspecto que no deja de ser importante en el desarrollo de la habilidad para resolver combinaciones numéricas. Ellos realizaron un estudio sobre la frecuencia en que los niños utilizan los dedos para resolver combinaciones numéricas y su relación con el cambio en la precisión de sus ejecuciones, las que fueron seguidas longitudinalmente a lo largo de 11 puntos temporales. El inicio del seguimiento fue en kínder y terminó al final de segundo grado. La precisión en las combinaciones numéricas aumentó de forma constante a lo largo del seguimiento, mientras que el uso de los dedos tendió a bajar. Los resultados indicaron que el uso de los dedos es sólo adaptativo al momento de iniciar el proceso de aprendizaje y eventualmente se pierde.

En otro estudio Beveridge, Weber, Derby y McLaughlin (2005) verificaron los efectos de una estrategia competitiva de intervención en estudiantes con dificultades matemáticas. Su intervención en el aula utilizó pistas de carrera matemáticas para enseñar las combinaciones numéricas, además de un momento previo de práctica de combinaciones numéricas. Ésta metodología de pistas de carrera matemáticas es un procedimiento de práctica y ejercicio, donde combinaciones numéricas conocidas y



no conocidas son ubicadas en una hoja de papel con forma de circuito ovalado, en el que aparecían 28 problemas con combinaciones numéricas a resolver (7 no conocidas y 21 conocidas, trabajadas previamente en el momento de práctica) y que debían completar lo más rápido que pudieran. Los resultados mostraron que este tipo de intervención aumentaba no sólo el interés por las matemáticas en los niños, sino también sus habilidades para resolver ejercicios matemáticos.

Un estudio de Poncy, Skinner y Jaspers (2006) evaluó y comparó 2 tipos de intervención para mejorar la fluidez y precisión de la habilidad para resolver combinaciones numéricas, en niños con un funcionamiento cognitivo descendido. El primer procedimiento evaluado fue el “Cover, copy and compare”, (CCC) cuya traducción sería “Tapar, copiar y comparar”. En sí la intervención consistía en 3 pasos; 1) el alumno observa la combinación numérica y su respuesta en una hoja de papel (e.g. $3 + 7 = 10$), la analiza y luego la tapa, 2) copia el ejercicio y su respuesta en otra hoja y 3) compara lo tapado con lo que ha copiado, repitiendo el resultado correcto 3 veces en voz alta. El segundo procedimiento evaluado fue el “Taped Problems” (TP) cuya traducción sería “Problemas grabados en audio”, en el que el alumno escucha una grabación de una persona leyendo combinaciones numéricas en voz alta, dejando 4 segundos de silencio antes de leer la respuesta para que el alumno escriba la respuesta que cree correcta, antes que la grabación la diga. Si se equivoca, el niño marca una cruz sobre su respuesta y escribe la respuesta correcta y, si no alcanza a escribir una respuesta, simplemente escribe la que la grabación indica. Los resultados de la comparación de ambas estrategias mostraron que ambas son eficaces para mejorar la fluidez y precisión de la habilidad para resolver combinaciones numéricas, sin embargo la estrategia TP fue más eficiente, dado que tomaba menos tiempo implementarla.

Fasko y Leach (2006) realizaron una intervención individualizada en un niño con indicadores de un Trastorno por Déficit Atencional con Hiperactividad, que presentaba dificultades con las combinaciones numéricas elementales. Fasko y Leach (2006) implementaron un entrenamiento con “Flash Cards” que incluía un andamiaje de apoyo. El procedimiento consistía en presentar las “Flash Cards” de las combinaciones numéricas que el niño no conocía (después de haber evaluado las que conocía y las que no conocía con una prueba de 100 combinaciones numéricas con dígitos del 0 al 9), pero sin el resultado (e.g. $3 + 4$), de tal manera que el niño diera la respuesta en 5 segundos. Si el alumno respondía bien se le otorgaba un signo “+” a la “Flash Card” y si no un signo “-“. Luego el niño debía traspasar el ejercicio completo a una hoja en blanco, incorporándose aquí el andamiaje, que consistía en que el alumno debía decir en voz baja el ejercicio verbalmente, para optimizar el proceso atencional y evitar equivocaciones al traspasar al papel. Los resultados de la intervención indicaron un aumento significativo en la precisión y fluidez de las adiciones que el niño realizaba.

Otra estrategia didáctica que ha sido estudiada, es la Instrucción Computarizada Asistida en Habilidades de Combinación Numérica (Computer-Assisted Instruction on Number Combination Skill) implementada por Fuchs et al. (2006), cuyo fundamento teórico principal es la del entrenamiento y práctica a partir de la simple memorización de las combinaciones numéricas y sus resultados, sin que sea necesario revisar las estrategias de conteo para resolverlas. Ésta estrategia consiste en la presentación de hechos matemáticos resueltos (e.g., $2 + 3 = 5$) en la pantalla de un computador por 1,7 segundos, seguidos de una pantalla en vacío en la que el alumno debe digitar el hecho matemático previamente presentado. Finalmente el software presentaba los resultados correctos e incorrectos del día. Los resultados demostraron que éste método era efectivo para fortalecer el cálculo mental relacionado con las combinaciones numéricas aditivas, pero no las de sustracción. Además presentó dificultades en su aplicación con aquellos niños que no manejaban bien el software, probablemente por no estar familiarizados con los equipos computacionales (mouse, teclado, etcétera.).

En otros estudios relacionados, se exploró la instrucción conceptual, sumada a las estrategias de entrenamiento y práctica computarizada, además de la práctica en papel y uso de “flash cards”, en las

que se les presentaba a los estudiantes cerca de 200 combinaciones numéricas de adiciones y sustracciones entre el 0 y el 18, al que denominaron “Math Flash” (Fuchs et al. 2007, citado en Fuchs et al., 2008) denominado también como “tutoría en recuperación de combinaciones numéricas” (por su nombre en inglés). En ésta estrategia, las combinaciones numéricas son introducidas en las sesiones a partir de un orden previamente establecido y de dificultad progresiva, siendo ejercitadas en un módulo de trabajo que dura aproximadamente 20 minutos, se implementa 3 veces a la semana y contempla 48 sesiones, en las que se atendía a aproximadamente 10 estudiantes por grupo.

Este procedimiento implementado por Fuchs et al. (2007, citado en Fuchs et al., 2008) demostró resultados significativos en cuanto al desarrollo del cálculo mental y la habilidad para resolver combinaciones numéricas aditivas y sustractivas en niños con y sin dificultades de aprendizaje.

En cuanto a estudios relacionados eminentemente con estrategias de cálculo mental en Chile, Gálvez et al. (2010) realizaron un estudio de la variedad de estrategias cognitivas, idiosincrásicas o aprendidas, empleadas por estudiantes del primer ciclo de enseñanza básica al practicar actividades de cálculo mental. Su estudio lo realizaron con una muestra de estudiantes de escuelas subvencionadas por el Estado, en estratos socio-económicos medios y medio-bajos en las ciudades de Santiago y Valparaíso, junto con un catastro de las estrategias observadas así como una primera versión de un programa desarrollado ellos, que permite evaluar el desempeño de los estudiantes, incluyendo sus tiempos de respuesta. El estudio en sí permitió, entre otras cosas, verificar que efectivamente los niños utilizan una variedad amplia de estrategias para resolver cálculos mentales, presentando algunas de ellas más familiaridad con los números y sus propiedades; por ejemplo conmutar en sumas o descomponer en forma aditiva y oportuna para calcular sumas y restas. Un hallazgo sorprendente de dicho estudio fue la facilidad con la que los niños calculaban con dobles y mitades. Pese a lo anterior, el espectro de estrategias observadas reveló una ausencia casi total de representaciones mentales para calcular mentalmente, por lo que concluyeron que es urgente promover este tipo de representaciones para facilitar el cálculo mental.

3. Marco metodológico

El trabajo realizado, dadas las características del mismo, corresponde a una investigación bajo el paradigma cuantitativo de tipo experimental, según lo expuesto por Hernández, Fernández y Baptista (2003).

La investigación presenta un diseño pre-experimental, con evaluación antes de la intervención y después de la intervención. Según sus características se le considera un diseño pre-experimental dado que, a partir de lo expuesto por Hernández et al., (2003), se ha llegado al acuerdo de que este tipo de experimentos se consideren pre-experimentales y no cuasi-experimentales.

El diseño de la investigación se grafica de la siguiente manera:

$$O_1 \quad X \quad O_2$$

De esta manera, “O₁” corresponde la evaluación inicial del grupo intervenido, antes de iniciar la intervención, “X” corresponde a la intervención realizada en el grupo y “O₂” corresponde a la evaluación del grupo después de la intervención.

Claramente al tratarse de un diseño que no incluye un grupo de control o cuasi-control, la limitación de este tipo de estudio es que no puede ser generalizable a otra población, por lo que los resultados obtenidos sólo son válidos para la población a la que es aplicado el estudio.



En el caso de la presente investigación, está constituida por estudiantes de la generación 2011 de la Escuela Francisco Zattera F-984 del sector rural de la Comuna de Laja, en la 8° región de Chile. La escuela es municipal y está considerada, según los datos de la prueba que mide el SIMCE, aportados por el MINEDUC (2011), como una escuela de sector rural, con una población eminentemente de condición socioeconómica baja, dado que entre el 80,1 y el 100% de sus estudiantes se encuentran en condición de vulnerabilidad social, y la mayoría de los apoderados ha declarado tener hasta 8 años de escolaridad, además de un ingreso del hogar no superior a los \$160 mil pesos. Además el Índice de Vulnerabilidad Escolar (IVE) de la escuela es de un 95,6% y su matrícula total es de 135 estudiantes.

El universo de la muestra está conformado por 135 estudiantes de la Escuela Francisco Zattera F-984, siendo la muestra 69 estudiantes, divididos en 4 cursos desde primer a cuarto año de enseñanza básica. Las edades de las unidades de análisis que conforman la muestra fluctúan entre los 6 y 11 años de edad, siendo 29 de ellos mujeres y 40 de ellos hombres. Dicha muestra fue seleccionada de forma no probabilística y corresponde a una muestra intencionada.

En el trabajo se han distinguido dos grandes variables a ser analizadas y estudiadas, la primera corresponde al cálculo mental y la segunda al programa de estimulación para el desarrollo del cálculo mental, basado en el entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo. Para la recopilación de datos referidos a la primera variable se utilizará el subtest de cálculo mental de la prueba de Evaluación de la Competencia Matemática (EVAMAT), versión chilena, de García et al., (2009), de la que se muestra un ejemplo en la figura 1. Se utilizará la misma prueba al principio y al final de la intervención, lo que permitirá verificar los efectos de la segunda variable sobre la población estudiada. Ésta última variable, por ser un programa de intervención, será descrita en cuanto a la dinámica de funcionamiento, tiempos, frecuencia y materiales necesarios para su implementación.

1ª TAREA CALCULA MENTALMENTE

Calcula mentalmente y elige la respuesta correcta, como en el ejemplo.

EJEMPLO $495 + 753 =$ ① 1.150 ② 2.060 ③ ~~1.248~~ ④ Ninguna

¿Alguna duda? Dispones de 4 MINUTOS.

①	$1.815 - 834 =$	930	981	896	Ninguna
②	$299 + 301 =$	550	600	650	500
③	$1.432 + 9.658 =$	10.536	13.846	12.320	11.090
④	$6.744 - 4.179 =$	5.196	3.514	2.565	2.178

Figura 1. Ejemplo de ítems subprueba de cálculo mental para 3° año básico, de la prueba EVAMAT

Una vez recopilados los datos, se analizarán los principales resultados obtenidos en cuanto a habilidades de cálculo en los estudiantes, con el apoyo de la herramienta estadística computacional Statistical Product and Service Solutions (SPSS). En dicho análisis se realizarán pruebas estadísticas como la prueba T de Student, análisis de frecuencias y desviación estándar.

3.1. Programa de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo

El programa de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo fue dado a conocer a los estudiantes y docentes como REOPERA, y es un programa generado a la base de los principios de la intervención intensiva en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo de Fuchs et al. (2007, citado en Fuchs et al., 2008), que pretende entrenar dichas habilidades con el fin de estimular el cálculo mental en estudiantes de primer a cuarto año de enseñanza básica.

El programa en sí consta de las siguientes etapas para su implementación:

Etapas de Apropiación Profesional: periodo del programa en el que se capacita a los docentes encargados de aplicar REOPERA, entregándoles la estructura del programa, materiales virtuales y concretos, técnicas y procedimientos de intervención, lineamientos del programa y modelaje de las sesiones. Dicha capacitación es realizada en 8 horas, divididas en 2 días.

Etapas de Evaluación Inicial: periodo del programa destinado a la evaluación inicial de las capacidades de cálculo mental que poseen los alumnos y alumnas participantes del programa. Dicha evaluación incluye la aplicación de la prueba de Evaluación de la Competencia Matemática EVAMAT, versión chilena.

Etapas de Intervención Psicopedagógica: periodo del programa destinado a la intervención propiamente tal, con las técnicas y metodología del programa REOPERA. El programa en sí es aplicado a partir de sesiones de entrenamiento en cálculo mental, cuya duración es de 10 a 15 minutos, 3 veces a la semana, y que son aplicadas en las horas de Educación Matemática.

Así mismo el programa REOPERA se encuentra construido a la base de que existen 2 requisitos fundamentales para el desarrollo del cálculo mental. Dichos requisitos son que los estudiantes manejen una gran cantidad de combinaciones numéricas (como $2+2=4$, $10+10=20$, $5 \times 5=25$, etc.) y además que manejen un amplio espectro de estrategias de cálculo mental. Es por ello que la intervención psicopedagógica se divide en 2 grandes etapas, incluyéndose además 1 mes de ejercicios de nivelación y evaluación, que se describen a continuación:

Mes 1; Ejercicios de Nivelación: durante este periodo se implementa una serie de ejercicios relacionados con conteo, numeración, equivalencia, cuantificación, decodificación de números, comparación y ordenación; con el fin de nivelar habilidades esenciales relacionadas con las matemáticas, además de verificar el estado de las capacidades matemáticas de los alumnos.

Meses 2, 3 y 4; Enseñanza explícita de Estrategias de Cálculo: durante este periodo se implementa una serie de ejercicios de enseñanza explícita de las estrategias de cálculo en pantalla gigante, las que se enseñan siempre después de presentar un ejercicio algorítmico escrito, con el fin de enseñar el abordaje del mismo. En la tabla 1 se presentan algunas de las estrategias emblemáticas abordadas en la intervención:



Desarrollo del cálculo mental a partir de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo

E. Valencia Cifuentes

Operación	Nombre de la estrategia	Descripción de la didáctica	Ejemplo gráfico de presentación en el aula en pantalla gigante
Adición	Contar todo	Se presenta a los niños una suma algorítmica (por ejemplo $2 + 4$), cuyos números se transforman en patrones de puntos. Luego se realiza el conteo en voz alta de todos los puntos.	
	Contar desde el primero	Se presenta a los niños una suma algorítmica (por ejemplo $7 + 3$), cuyo segundo número se transforma en patrón de puntos. Luego se cuenta en voz alta desde el primer número.	
	Salto de 10	Se presenta a los niños una suma algorítmica en la que uno de sus sumandos sólo tiene decenas (por ejemplo $5 + 20$), ubicando el primer número con un punto rojo en la recta numérica y luego representando el segundo número con regletas cuisenaire de 10, tantas veces como decenas contenga, sobre la recta numérica.	
	Descomposición de 2 datos	Se presenta a los niños una suma algorítmica (por ejemplo $13 + 20$), representando ambos números con regletas de 10 para la decena y una regleta que represente su unidad. Luego se ubican en la recta numérica las regletas de 10 y finalmente las regletas de las unidades, mostrando al mismo tiempo la operación numérica que se representa.	
Sustracción	Contar hacia atrás desde el mayor	Se presenta a los niños una resta algorítmica, representando el número mayor en recta numérica y luego tarjando desde el último número de la recta, la cantidad de elementos del segundo número.	
	Salto de 10 hacia atrás	Se presenta a los niños una resta algorítmica en la que el sustraendo sólo se conforma por decenas (por ejemplo $28 - 10$), ubicando el número mayor en recta numérica con un punto rojo. Luego se representa el segundo número con regletas cuisenaire de 10 desde el punto rojo hacia atrás y tapando los números de la recta, tantas veces como decenas contenga.	
Multiplicación	Descomposición aditiva	Se presenta a los niños una multiplicación algorítmica, descomponiéndola en una suma de tantos sumandos como indique el segundo factor. Luego se representa cada sumando sobre la recta numérica con regletas de 10 y regletas de la unidad correspondiente. Finalmente, en otra recta, se reubican primero todas las decenas de los sumandos y luego todas las unidades, con el fin de mostrar que de ambas formas se llega al mismo resultado, pero la segunda es más sencilla y rápida.	
	Compensación de factores	Se presenta a los niños una multiplicación algorítmica, representando el primer factor con regletas, dividido en decenas y unidades, tantas veces como indique el segundo factor, sobre la recta numérica. Luego se transforma el primer factor a la mitad y el segundo factor al doble (por ejemplo, $12 \times 4 = 6 \times 8$), de tal forma de dejar una multiplicación con números más pequeños. Finalmente se representa la nueva multiplicación tal como con la primera para mostrar que de ambas formas se llega al mismo resultado, pero la segunda es más sencilla y rápida.	

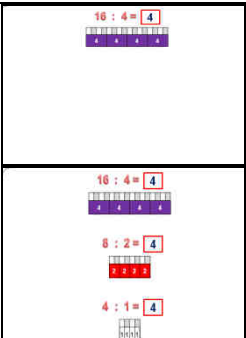
División	Simplificar a la mitad	<p>Se presenta a los niños una división algorítmica ($16:4$), representando el dividendo con recta numérica (16), y el divisor con regleta cuisenaire (4), tantas veces como indique el divisor, sobre la recta numérica, de tal forma de mostrar cuántos divisores caben en el dividendo. Luego se simplifica a la mitad el dividendo y divisor ($16:4=8:2$), realizando el mismo ejercicio de representación en recta y con regletas, mostrando a los alumnos que la cantidad de divisores sigue siendo la misma. Se repite el procedimiento hasta no poder simplificar más a la mitad ($8:2=4:1$).</p>	
-----------------	-------------------------------	--	---

Tabla 1. Estrategias de cálculo enseñadas explícitamente en el programa REOPERA

Las sesiones de trabajo durante este periodo, consideran 3 momentos de intervención descritos en la figura 2:



Figura 2. Esquema con los 3 momentos de intervención de la sesión REOPERA durante los meses 2, 3 y 4

La lógica general es que el primer momento genere necesidad en los alumnos, presentando ejercicios algorítmicos desafiantes, relacionados con la estrategia a revisar en el día, de tal forma que en el tercer momento puedan aplicar la estrategia enseñada.

Meses 5, 6 y 7; Entrenamiento en Combinaciones Numéricas y repaso de Estrategias de Cálculo Mental: durante este periodo se realiza un entrenamiento en combinaciones numéricas relacionadas con adición y sustracción en 1º y 2º año básico, y multiplicación en 3º y 4º año básico. Además se deja un espacio de la sesión para el repaso de aquellas estrategias de cálculo mental que no hayan sido convenientemente aprendidas durante los meses 2, 3 y 4.

Las sesiones de trabajo durante este periodo, consideran 3 momentos de intervención descritos en la figura 3:



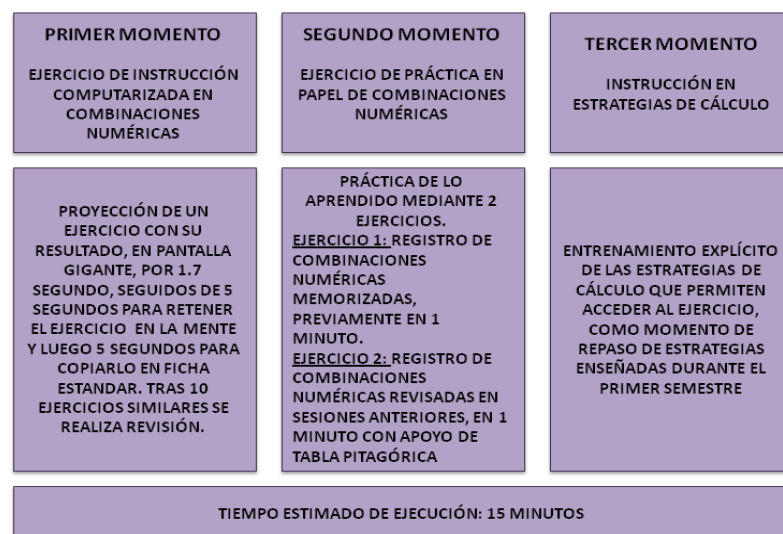


Figura 3. Esquema con los 3 momentos de intervención de la sesión REOPERA durante los meses 5, 6 y 7

Etapas de Evaluación Final: periodo del programa destinado a la evaluación final de las capacidades de cálculo mental que poseen los alumnos y alumnas participantes del programa, empleándose para ello la misma prueba utilizada en la evaluación inicial.

Además de las 4 etapas de ejecución, el programa posee acompañamiento al docente durante todo el año, mediante visitas al aula para verificar la intervención docente, retroalimentando sus ejecuciones y además entregando asesoría y modelaje de las técnicas de intervención. El acompañamiento es permanente e incluye visitas mes a mes, además de la capacitación inicial del programa.

4. Resultados

La muestra total del presente estudio corresponde a 69 casos, pertenecientes a la Escuela Francisco Zattera F-984, de la Comuna de Laja en la 8° Región, caracterizados a través de la tabla 2:

Variables		Primero Básico	Segundo Básico	Tercero Básico	Cuarto Básico
Edad		6,88	7,73	8,95	10,06
Condición socio-económica	Alta	0%	0%	0%	0%
	Media	0%	0%	4,76%	0%
	Media Baja	12,5%	13,4%	19,04%	17,65%
	Baja	87,5%	86,6%	76,2%	82,35%
Sexo	Femenino	8	5	10	6
	Masculino	8	10	11	11
Cantidad de estudiantes		16	15	21	17

Tabla 2. Variables demográficas de la población intervenida

Como puede apreciarse respecto de la edad, se observa que es coherente con la condición curricular, es decir, niños que fluctúan entre 6 y 10 años de edad.

En cuanto a la condición socio-económica, hay una tendencia marcada en situar a las familias de los estudiantes que participaron del trabajo investigativo como condición baja, de manera casi homóloga en los porcentajes.

Si se observa la variable sexo, en primero y tercero básico la distribución fue relativamente similar en cuanto a hombres y mujeres, mientras que en segundo y cuarto básico hubo una tendencia a mayor cantidad de hombres dentro de los cursos.

Finalmente en cuanto a la cantidad de estudiantes, se observa que todos los cursos tenían una cantidad similar, fluctuando entre los 15 y 21 estudiantes por curso.

A continuación se presentan los resultados de las pruebas realizadas a través de la plataforma de análisis estadístico SPSS versión 15.0.1, en los que se comparan los resultados de la evaluación realizada con el Subtest de Cálculo de la prueba EVAMAT, a los cursos de primer a cuarto año de enseñanza básica, antes del inicio de la intervención con el programa REOPERA y después de finalizada la intervención. Para los análisis a continuación se realizaron pruebas estadísticas descriptivas para la obtención de medias y desviaciones estándar, además de la comparación de medias mediante la prueba t de Student para muestras relacionadas.

En la tabla 3 se presentan los resultados para la comparación de medias entre grupos antes y después de la intervención, de primero a cuarto año básico, a través de la prueba t de Student:

Curso	Pre-test		Post-test		Delta %	Prueba t student Sig. (bilateral)
	M	DE	M	DE		
Primero Básico	6,5	1,862	9,31	2,213	69,82%	0,000
Segundo Básico	5,4	1,844	9,87	2,031	54,71%	0,000
Tercero Básico	3,48	1,632	6,14	1,459	56,67%	0,000
Cuarto Básico	4,88	1,764	8,82	1,334	55,32%	0,000

Tabla 3. Comparación de medias de primer a cuarto año básico, antes y después de la intervención

Como se puede observar en la tabla 3, al comparar las medias de puntajes obtenidos en el subtest de cálculo mental de primero básico, antes de la intervención con el programa REOPERA y después de la intervención con dicho programa, se puede observar un aumento en las medias de 6,5 puntos a 9,31 puntos, con un delta de aumento de 69,82%. Dicho aumento en las medias, al ser analizado con la prueba t de student, nos muestra una significación bilateral de 0.000, asumiéndose entonces que, tal como lo indican Hernández et al. (2003), al ser la significación menor a 0.05, los grupos son significativamente diferentes y por lo tanto el aumento en un 69,82% es significativo.

Ahora bien, al comparar las medias de puntajes obtenidos en el subtest de cálculo mental de segundo básico, antes de la intervención con el programa REOPERA y después de la intervención con dicho programa, se puede observar un aumento en las medias de 5,4 puntos a 9,87 puntos, con un delta de aumento de 54,71%. Dicho aumento en las medias, al ser analizado con la prueba t de student, nos muestra una significación bilateral de 0.000, asumiéndose entonces que, tal como lo indican



Hernández et al. (2003), al ser la significación menor a 0.05, los grupos son significativamente diferentes y por lo tanto el aumento en un 51,66% es significativo.

Si luego se observan las medias de puntajes obtenidos en el subtest de cálculo mental de tercero básico, antes de la intervención con el programa REOPERA y después de la intervención con dicho programa, se puede observar un aumento en las medias de 3,48 puntos a 6,14 puntos, con un delta de aumento de 56,67%. Dicho aumento en las medias, al ser analizado con la prueba t de student, nos muestra una significación bilateral de 0.000, asumiéndose entonces que, tal como lo indican Hernández et al. (2003), al ser la significación menor a 0.05, los grupos son significativamente diferentes y por lo tanto el aumento en un 51,66% es significativo.

Por último si observamos las medias de puntajes obtenidos en el subtest de cálculo mental de cuarto básico, antes de la intervención con el programa REOPERA y después de la intervención con dicho programa, se puede observar un aumento en las medias de 4,88 puntos a 8,82 puntos, con un delta de aumento de 55,32%. Dicho aumento en las medias, al ser analizado con la prueba t de student, nos muestra una significación bilateral de 0.000, asumiéndose entonces que, tal como lo indican Hernández et al. (2003), al ser la significación menor a 0.05, los grupos son significativamente diferentes y por lo tanto el aumento en un 55,32% es significativo.

En la tabla 4 se presentan los resultados para la comparación de medias entre grupos femeninos antes y después de la intervención, de primero a cuarto año básico, a través de la prueba t de Student:

Curso	Pre-test		Post-test		Delta %	Prueba t student Sig. (bilateral)
	M	DE	M	DE		
Primero Básico	6,63	1,847	9,25	2,493	71,67%	0,005
Segundo Básico	6,4	2,074	10,4	1,342	61,53%	0,005
Tercero Básico	3,4	1,834	6,2	1,317	54,83%	0,001
Cuarto Básico	4,5	1,049	8,67	1,211	51,9%	0,004

Tabla 4. Comparación de medias de grupos femeninos de primer a cuarto año básico, antes y después de la intervención

Como se puede observar en la tabla 4, al comparar las medias de puntajes obtenidos en el subtest de cálculo mental del grupo femenino de primero básico, antes de la intervención con el programa REOPERA y después de la intervención con dicho programa, se puede observar un aumento en las medias de 6,63 puntos a 9,25 puntos, con un delta de aumento de 71,67%. Dicho aumento en las medias, al ser analizado con la prueba t de student, nos muestra una significación bilateral de 0.005, asumiéndose entonces que, tal como lo indican Hernández et al. (2003), al ser la significación menor a 0.05, los grupos son significativamente diferentes y por lo tanto el aumento en un 71,67% es significativo.

Ahora bien, al comparar las medias de puntajes obtenidos en el subtest de cálculo mental del grupo femenino de segundo básico, antes de la intervención con el programa REOPERA y después de la intervención con dicho programa, se puede observar un aumento en las medias de 6,4 puntos a 10,4 puntos, con un delta de aumento de 61,53%. Dicho aumento en las medias, al ser analizado con la prueba t de student, nos muestra una significación bilateral de 0.005, asumiéndose entonces que, tal

como lo indican Hernández et al. (2003), al ser la significación menor a 0.05, los grupos son significativamente diferentes y por lo tanto el aumento en un 61,53% es significativo.

Si luego se observan las medias de puntajes obtenidos en el subtest de cálculo mental del grupo femenino de tercero básico, antes de la intervención con el programa REOPERA y después de la intervención con dicho programa, se puede observar un aumento en las medias de 3,4 puntos a 6,2 puntos, con un delta de aumento de 54,83%. Dicho aumento en las medias, al ser analizado con la prueba t de student, nos muestra una significación bilateral de 0.001, asumiéndose entonces que, tal como lo indican Hernández et al. (2003), al ser la significación menor a 0.05, los grupos son significativamente diferentes y por lo tanto el aumento en un 54,83% es significativo.

Por último si observamos las medias de puntajes obtenidos en el subtest de cálculo mental del grupo femenino de cuarto básico, antes de la intervención con el programa REOPERA y después de la intervención con dicho programa, se puede observar un aumento en las medias de 4,5 puntos a 8,67 puntos, con un delta de aumento de 51,9%. Dicho aumento en las medias, al ser analizado con la prueba t de student, nos muestra una significación bilateral de 0.001, asumiéndose entonces que, tal como lo indican Hernández et al. (2003), al ser la significación menor a 0.05, los grupos son significativamente diferentes y por lo tanto el aumento en un 51,9% es significativo.

En la tabla 5 se presentan los resultados para la comparación de medias entre grupos masculinos antes y después de la intervención, de primero a cuarto año básico, a través de la prueba t de Student:

Curso	Pre-test		Post-test		Delta %	Prueba t student Sig. (bilateral)
	M	DE	M	DE		
Primero Básico	6,42	1,881	9,42	2,065	68,15%	0,000
Segundo Básico	4,9	1,595	9,6	2,319	51,04%	0,000
Tercero Básico	3,55	1,508	6,09	1,640	58,29%	0,002
Cuarto Básico	5,09	2,071	8,91	1,446	57,12%	0,000

Tabla 5. Comparación de medias de grupos masculinos de primer a cuarto año básico, antes y después de la intervención

Como se puede observar en la tabla 5, al comparar las medias de puntajes obtenidos en el subtest de cálculo mental del grupo masculino de primero básico, antes de la intervención con el programa REOPERA y después de la intervención con dicho programa, se puede observar un aumento en las medias de 6,38 puntos a 9,38 puntos, con un delta de aumento de 68,15%. Dicho aumento en las medias, al ser analizado con la prueba t de student, nos muestra una significación bilateral de 0.000, asumiéndose entonces que, tal como lo indican Hernández et al. (2003), al ser la significación menor a 0.05, los grupos son significativamente diferentes y por lo tanto el aumento en un 68,15% es significativo.

Ahora bien, al comparar las medias de puntajes obtenidos en el subtest de cálculo mental del grupo masculino de segundo básico, antes de la intervención con el programa REOPERA y después de la intervención con dicho programa, se puede observar un aumento en las medias de 4,9 puntos a 9,6 puntos, con un delta de aumento de 51,04%. Dicho aumento en las medias, al ser analizado con la prueba t de student, nos muestra una significación bilateral de 0.000, asumiéndose entonces que, tal



como lo indican Hernández et al. (2003), al ser la significación menor a 0.05, los grupos son significativamente diferentes y por lo tanto el aumento en un 51,04% es significativo.

Si luego se observan las medias de puntajes obtenidos en el subtest de cálculo mental del grupo masculino de tercero básico, antes de la intervención con el programa REOPERA y después de la intervención con dicho programa, se puede observar un aumento en las medias de 3,55 puntos a 6,09 puntos, con un delta de aumento de 58,29%. Dicho aumento en las medias, al ser analizado con la prueba t de student, nos muestra una significación bilateral de 0.002, asumiéndose entonces que, tal como lo indican Hernández et al. (2003), al ser la significación menor a 0.05, los grupos son significativamente diferentes y por lo tanto el aumento en un 58,29% es significativo.

Por último si observamos las medias de puntajes obtenidos en el subtest de cálculo mental del grupo masculino de cuarto básico, antes de la intervención con el programa REOPERA y después de la intervención con dicho programa, se puede observar un aumento en las medias de 5,09 puntos a 8,91 puntos, con un delta de aumento de 57,12%. Dicho aumento en las medias, al ser analizado con la prueba t de student, nos muestra una significación bilateral de 0.000, asumiéndose entonces que, tal como lo indican Hernández et al. (2003), al ser la significación menor a 0.05, los grupos son significativamente diferentes y por lo tanto el aumento en un 57,12% es significativo.

5. Discusión y conclusiones

Respecto del objetivo específico “verificar si el programa de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo influye en el desarrollo del cálculo mental, en función de los distintos niveles escolares”, se ha visto que desde primer a cuarto año de enseñanza básica, los grupos mejoraron significativamente sus habilidades de cálculo mental, con fluctuaciones delta de entre un 54,71% hasta un 69,82% de mejora. Con ello se verifica que el programa de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo efectivamente mejora el cálculo mental de estudiantes de primer a cuarto año de enseñanza básica, independiente del curso en sí.

Respecto del objetivo específico “verificar si el programa de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo influye en el desarrollo del cálculo mental, en función del sexo de los sujetos en estudio”, se ha visto que desde primer a cuarto año de enseñanza básica, tanto los grupos femeninos como los masculinos mejoraron significativamente sus habilidades de cálculo mental, con fluctuaciones delta de entre un 51,9% hasta un 71,67% de mejora en las mujeres, y fluctuaciones delta entre un 51,04% hasta un 68,15% de mejora en los hombres. Con ello se verifica que el programa de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo efectivamente mejora el cálculo mental de estudiantes de primer a cuarto año de enseñanza básica, independiente de la variable sexo.

Es así que, con respecto al objetivo general “determinar si un programa de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo, influye en el desarrollo del cálculo mental de estudiantes de primer a cuarto año de enseñanza básica”, se puede verificar que el programa de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo efectivamente mejora el cálculo mental de estudiantes de primer a cuarto año de enseñanza básica, y que dicha influencia se traduce en mejoras significativas en los resultados obtenidos ante la evaluación de sus habilidades de cálculo mental.

Lo anterior nos lleva a concluir que, ante la pregunta de investigación “¿es posible mejorar el desarrollo del cálculo mental en estudiantes de primer a cuarto año de enseñanza básica, a partir de un programa de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo?”, se puede responder que efectivamente el programa de intervención en combinaciones numéricas y estrategias de

cálculo REOPERA, es una herramienta de gran utilidad para la mejora del desarrollo del cálculo mental en estudiantes de primer a cuarto año de enseñanza básica, en la Escuela Francisco Zattera F-984 de la Comuna de Laja, confirmando con ello la hipótesis de trabajo planteada en la investigación.

Ahora bien, quedan pendientes algunas interrogantes. Por ejemplo si se piensa en la variable “sexo”, es interesante observar cómo los porcentajes de mejora después de la intervención, aparentemente son mayores en mujeres que en hombres, pero dado que el objetivo del estudio no era verificar en qué sexo había mayor influencia, sino simplemente verificar si influía en ambos sexos, sería interesante que dicha variable fuera incluida en estudios posteriores.

Si se piensa ahora en la variable “condición socio-económica”, podremos notar que la mayoría de los estudiantes fueron clasificados en condición socio-económica baja y, pese a que se suele pensar que los estudiantes de dicha condición están más desaventajados que aquellos de condición socio-económica media o alta, sus resultados y mejoras fueron significativos, lo que nos deja la interrogante de si el programa REOPERA influye en la mejora del cálculo mental independiente del nivel socio-económico, o si sólo es aplicable a población socio-económica baja.

Otra interrogante, relacionada con la aplicación del programa, es la relacionada con el comportamiento de los estudiantes durante las sesiones, el nivel de motivación que tenían con respecto a actividades matemáticas y las posibles necesidades educativas especiales que algunos de los niños pudieran haber presentado. Dado que no se recabaron datos respecto del comportamiento de los niños durante las sesiones, se desconoce si el programa en sí es aplicable a grupos de estudiantes en los que haya o no niños con necesidades educativas especiales, alta o baja motivación por las matemáticas o dificultades de comportamiento al interior del aula.

Por último una interrogante que surge del estudio, es si los resultados obtenidos pudieran ser generalizables a otras escuelas con similares características o, eventualmente, a cualquier escuela del país. Lo anterior dado que el estudio se realizó sólo con estudiantes de la escuela antes mencionada, y no se incorporaron grupos control en el estudio como para poder generalizar un poco más los resultados.

Sería interesante que estudios futuros incluyeran las variables previamente mencionadas, y es absolutamente sugerible que lo hagan, de tal forma que el programa REOPERA pueda ser validado para otros tipos de población y distintos tipos de niños, así como también pensar en el desafío de realizar un estudio más elaborado y validar el programa, de tal forma de que sea aplicable a cualquier curso de primero a cuarto año básico en el país.

Finalmente, en virtud de los resultados de la investigación y las conclusiones expuestas, se hace importante y necesario poder reflexionar con respecto a las capacidades matemáticas de los niños de escuelas vulnerables, dado que pese a haber sido estudiantes de condición socio-económica baja, y con un Índice de Vulnerabilidad Escolar de un 95,6%, se pudo observar resultados y avances significativos en ellos. La magnitud de encontrarse con este tipo de resultados, rompe todos los esquemas y prejuicios que pudieran existir sobre la capacidad de las escuelas con poblaciones de estudiantes más desfavorecidos, mostrando mediante esta investigación que, al aplicar las estrategias y metodologías adecuadas de forma sistemática, se puede generar mejoras en las capacidades de los estudiantes, aunque provengan de sectores vulnerables.



Bibliografía

- Baroody, J. (1985). Mastery of the basic number combination: Internalization of relationships or facts?. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16,2, 83 – 98.
- Baroody, J. (1994). An evaluation of evidence supporting fact-retrieval models. *Learning and Individual Differences*, 6, 1 – 36.
- Baroody, A., Bajwa, N. & Eiland, M. (2009). Why can't Johnny remember the basic facts?. *Developmental Disabilities Research Reviews*, 15, 69 – 79.
- Beveridge, B., Weber, K., Derby, K. & McLaughlin, T. (2005). The effects of a math racetrack with two elementary students with math disabilities. *The international Journal of Special Education*, 20, 58 – 65.
- Bravo, J. (2011). SIMCE: Pasado, presente y futuro del sistema nacional de evaluación. *Estudios Públicos*, 123, 189 – 211.
- Campbell, J. & Graham, D. (1985). Mental multiplication skill: structure, process and acquisition. *Canadian Journal of Psychology*, 39, 338 – 362.
- Carrol, W. (1996). Mental computation of students in a Reform-Based Mathematics Curriculum. *School Science and Mathematics* 96(6). 34 – 56.
- Crowley, K., Shrager, J. & Siegler, R. (1997). Strategy discovery as a competitive negotiation between metacognitive and associative mechanisms. *Developmental Review*, 17, 462 – 489.
- Deaño, M. (2000). *Cómo prevenir las dificultades del cálculo*. Málaga: Aljibe.
- Espinoza, L., Barbé, J. & Gálvez, G. (2009). Estudio de fenómenos didácticos vinculados a la enseñanza de la aritmética en la educación básica chilena. *Enseñanza de las ciencias*, 27(2), 157 – 168.
- Fasko, S. & Leach, R. (2006). *A math fact fluency intervention with scaffolding*. Unpublished manuscript, University of Toledo, Toledo, OH.
- Fuchs, L., Fuchs, D., Hamlet, C., Powell, S., Capizzi, A., & Seethaler, P. (2006). The effects of computer-assisted instrucción on number combination skill in at-risk first graders. *Journal of Learning Disabilities*, 39, 467 – 475.
- Fuchs, L., Fuchs, D., Powell, S., Seethaler, P., Cirino, P. & Fletcher, J. (2008). Intensive intervention for students with math disabilities: seven principles of effective practice. *Learning Disability Quarterly*, 31, 79 – 92.
- Fuchs, L., Powell, S., Seethaler, P., Fuchs, D. & Hamlet, C. (2010). A framework for remediating number combination deficits. *Council for Exceptional Children*, 76, 135 – 156.
- Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger P., Mena, A., Tanter, E.,... S. & Soto-Andrade, J. (2010). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(3), 129 – 158.
- García, J., García, B., González, D., Jiménez, A., Jiménez, E. & González, M. (2009). *Prueba para la Evaluación de la Competencia Matemática*. Madrid, España: EOS.
- Golman, S., Pellegrino, J. & Mertz, D. (1988). Extended practice of basic addition facts: strategy changes in learning-disabled students. *Cognition and Instrucción*, 5(3), 223 – 265.
- Gómez, B. (1994). Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: Un análisis en la formación de profesores. Granada, España: Comares.
- Gómez, B. (1995). Los métodos de CM vertidos por la tradición reflejada en los libros de aritmética. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática* 2 (5), 91-101.
- Gómez, B. (2005). La enseñanza del cálculo mental. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 4, 17 – 19.
- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2003). *Metodología de la Investigación*. México, DF, México: MacGraw-Hill.
- Jordan, N., (2007). *The need for number sence*. *Educational Lidership*, 65, 63 – 66.
- Jordan, N., Kaplan, D., Ramineni, Ch. & Locuniak, M. (2008). Development of number combination skill in the early school years: when do fingers help?. *Developmental Science*, 11, 662 – 668.

- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Knops, A.; Thirion, B.; Hubbard, E.; Michel, V. & Dehaene, S. (2009). Recruitment of an area involved in eye movements during mental arithmetic. *Science* 1324 (5934), 1583 – 1585.
- Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from*. New York: Basic Books.
- Leger, P., Gálvez, G., Cubillos, L., Cosmelli, D., Inostroza, M., Luci, G.,... Soto-Andrade, J. (2011). *ECOCAM, un sistema computacional adaptable al contexto para promover estrategias de cálculo mental: Un diseño y estudio de casos*. Manuscrito sin publicar, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias de la Educación, Santiago, Chile.
- Lethielleux, C. (2005). *Le calcul mental au cycle des apprentissages fondamentaux (tome 1)*. Paris, France: Bordas/Sejer.
- Ministerio de Educación (2008). *Orientaciones para el uso de recursos SEP*. Santiago de Chile: Autor.
- Ministerio de Educación (2011). *Informe nacional de resultados del SIMCE 2010*. Santiago de Chile: Autor.
- National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundations for success*. Washington, DC: Autor.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (2010), *PISA 2009 Results: Executive Summary*. Recuperado de <http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/34/60/46619703.pdf>
- Poncy, B., Skinner, Ch., & Jaspers, K. (2006). Evaluating and comparing interventions designed to enhance math fact accuracy and fluency: Cover, Copy and Compare versus Taped Problems. *Journal of Behavioral Education*, 16, 27 – 37.
- Powell, S., Fuchs, L., Fuchs, D., Cirino, P. & Fletcher, J. (2009). Effects of fact retrieval tutoring on third grade students with math difficulties with and without reading difficulties. *Learning Disabilities Research & Practice*, 74 (2), 155 – 173.
- Radford, R. & André, M. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(2), 215 – 250.
- Soto-Andrade, J. (2006). Un monde dans un grain de sable: Métaphores et analogies dans l'apprentissage des mathématiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 123-147.

Emilio Valencia Cifuentes. Departamento de Educación de la comuna de Laja, Chile, 8° Región. Nacido en la ciudad de Laja (Chile) el 30 de noviembre de 1985, Psicólogo de la Universidad Santo Tomás, con Diplomado en Evaluación de Aprendizajes del Instituto Iplacex, Postítulo en Reeducción Psicopedagógica para la Matemática del Instituto Iplacex, candidato a Magister en Educación Especial y Psicopedagogía de la Universidad Católica del Maule. Actualmente psicólogo en el Departamento de Educación de la Comuna de Laja y además Docente Universitario en la Universidad Santo Tomás, sede Los Ángeles, Instituto Los Lagos, sede Los Ángeles y el Instituto AIEP, sede Los Ángeles. emilio.valencia@gmail.com

